Correction exercice : Etude d'un chauffe-ballon

1. $Q = m_{eau} \times c_{eau} \times (T_{fluide} - T_i)$
$= \rho_{eau} \times V \times c_{eau} \times (T_{fluide} - T_i)$

AN : $Q = 1\,000 \times 0{,}300 \times 4\,180 \times (70 - 30) = $ **$5{,}0 \times 10^7$ J**

2. $P = \dfrac{Q}{\Delta t} = \dfrac{5{,}0 \times 10^7}{3 \times 3\,600} = 4{,}6 \times 10^3$ W

3. a. L'eau du ballon au contact du serpentin est chauffée par conduction. Puis, des mouvements de convection de l'eau dans le ballon permettent, à cette eau chauffée au contact du serpentin, de chauffer l'ensemble du ballon. L'eau du ballon est donc chauffée par convection et par conduction.

b. Unité de $h \times S \times (T_{fluide} - T(t)) \times dt$:

$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1} \times m^2 \times K \times s = W \cdot s = J$

Unité de δQ : J

La relation $\delta Q(t) = h \times S \times (T_{fluide} - T(t)) \times dt$ est donc homogène.

c. $dU(T) = m_{eau} \times c_{eau} \times dT$

d. La variation d'énergie interne d'un système fermé au repos et la somme de l'énergie reçue par travail ou par transfert thermique.

$\Delta U = W + Q$

e. Le système étudié est l'eau contenue dans le ballon.

On applique le 1[er] principe de la thermodynamique au système :

$dU(T) = \delta Q(t)$ soit $m_{eau} \times c_{eau} \times dT = h \times S \times (T_{fluide} - T(t))dt$

$$\frac{m_{eau} \times c_{eau}}{h \times S} \times \frac{dT(t)}{dt} = T_{fluide} - T(t)$$

Finalement : $\dfrac{m_{eau} \times c_{eau}}{h \times S} \times \dfrac{dT(t)}{dt}(t) + T(t) = T_{fluide}$

f. La solution de cette équation différentielle de premier ordre avec un second membre est de la forme :

$T(t) = A \times e^{-kxt} + B$ **(2)**

où A et B sont des constantes à déterminer en étudiant les conditions initiales et $k = \dfrac{h \times S}{m_{eau} \times c_{eau}}$.

Nous savons qu'à $t = 0$, la température vaut T_i ; donc $T(0) = T_i$.

En remplaçant t par 0 dans l'équation **(2)** :

$T(0) = A \times e^{-k \times 0} + B = T_i$ donc $A + B = T_i$.

En dérivant la solution de l'équation différentielle **(2)**, nous obtenons :

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \times A \times e^{-kxt}$$

En remplaçant la dérivée et la solution dans l'équation différentielle et en divisant les deux membres de l'égalité par k, il vient :

$$\frac{1}{k} \times (-k \times A \times e^{-kxt})) + A \times e^{-kxt} + B = T_{fluide}$$

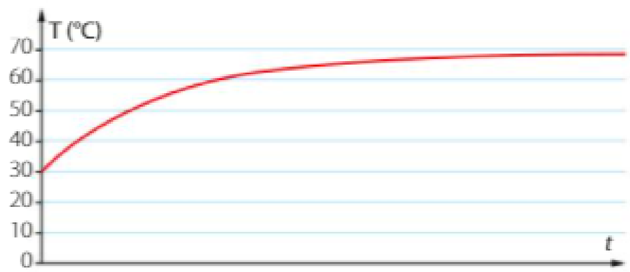
d'où $B = T_{fluide}$ et donc $A = T_i - T_{fluide}$.

Conclusion : la température de la source en contact avec le thermostat suit la relation :

$T(t) = A \times e^{-kxt} + B = (T_i - T_{fluide}) \times e^{-kxt} + T_{fluide}$

Finalement : $T(t) = (T_i - T_{fluide}) \times e^{-\frac{h \times S}{m_{eau} \times c_{eau}} xt}) + T_{fluide}$

g.



h. $T(t) = (T_i - T_{fluide}) \times e^{-\frac{h \times S}{m_{eau} \times c_{eau}} xt}) + T_{fluide}$

$T(2{,}5 \times 3\,600) = (30 - 70) \times e^{-\frac{3\,000 \times 0{,}2000}{300 \times 4\,180} \times 2{,}5 \times 3\,60} + 70$

$= 69$ °C

On peut considérer que l'eau du ballon a été portée à la température voulue au bout de 2 h 30, c'est-à-dire à 16 h 30.