

Exercice : Etude d'un chauffe-ballon

On souhaite étudier l'évolution de la température de l'eau d'un ballon d'eau chaude, de volume $V = 300$ L, pendant les heures creuses de l'après-midi de 14 h à 17 h. On considère que le ballon est parfaitement calorifugé et, qu'à 14 h, la température des 300 L d'eau est de $T_i = 30$ °C.

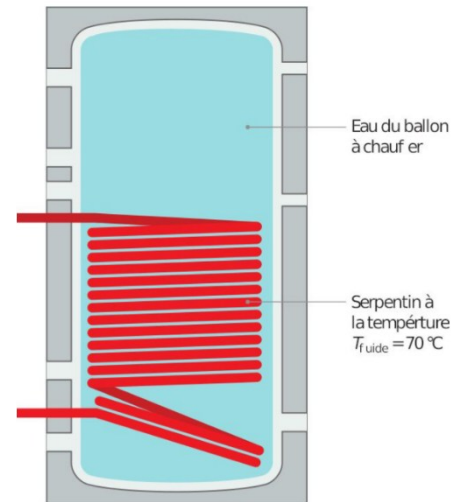
Le chauffage de l'eau du ballon est assuré par la circulation d'eau chaude dans un serpentin, dont la surface S de contact avec le liquide à chauffer à une température $T_{\text{fluide}} = 70$ °C supposée constante et uniforme.

Données : Coefficient d'échange conducto-convectif dans le cas étudié : $h = 3\,000$ W. m⁻² .K⁻¹

Surface d'échange entre le serpentin et l'eau : $S = 2000$ cm²

Capacité thermique massique de l'eau : $c_{\text{eau}} = 4180$ J. kg⁻¹ . K⁻¹

Masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1000$ kg. m⁻³



- Calculer l'énergie nécessaire pour amener l'eau du ballon à la température $T_{\text{fluide}} = 70$ °C.
- Calculer la puissance minimale du chauffage pour que l'eau soit à la température de 70 °C à 17h.
- Le transfert thermique entre le serpentin et l'eau du ballon se fait uniquement par convection et par conduction. Dans le modèle conducto-convectif de Newton, l'énergie δQ échangée par un système à la température T en contact sur une surface S avec un fluide à la température T_{fluide} s'exprime par la relation :

$$\delta Q(t) = hS(T_{\text{fluide}} - T(t))dt \quad (1)$$

avec h , le coefficient d'échange conducto-convectif exprimé en W. m⁻² .K⁻¹.

- Justifier que le transfert thermique qui permet à l'eau du ballon de se réchauffer se fait par convection et par conduction.
- Vérifier, par analyse dimensionnelle, que la relation (1) du modèle conducto-convectif de Newton est homogène.
- Exprimer, en fonction de c_{eau} , m_{eau} et dT , la variation de l'énergie interne $dU(T)$ correspondant à une variation de température dT de l'eau du ballon de masse m_{eau} .
- Rappeler l'énoncé du premier principe de la thermodynamique dans le cas d'un système fermé au repos.
- En faisant un bilan d'énergie, montrer que l'équation différentielle régissant l'évolution de la température de l'eau dans le ballon s'écrit :

$$\frac{m_{\text{eau}} \times c_{\text{eau}}}{h \times S} \times \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = T_{\text{fluide}}$$

avec m_{eau} la masse des 300 L d'eau du ballon.

- Montrer que la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$T(t) = (T_i - T_{\text{fluide}}) \times e^{-\frac{h \times S}{m_{\text{eau}} \times c_{\text{eau}}} t} + T_{\text{fluide}}$$

Représenter l'allure de $T(t)$ en graduant l'axe des ordonnées uniquement.

- Calculer la température de l'eau du ballon après 2 h 30 min de chauffage. Conclure.