Lancer d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme

En première approximation, lorsqu'on étudie le mouvement d'un projectile après son lancer, on néglige toutes les forces extérieures qui s'exercent sur le projectile autres que son poids.
On dit alors que le projectile a un mouvement de chute libre.

On a la situation suivante :

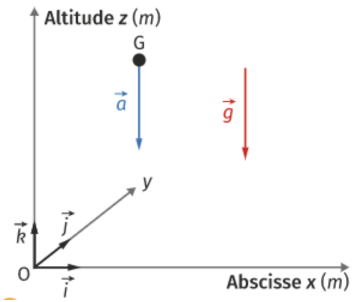
- système : projectile de masse m
- référentiel : terrestre, supposé galiléen
- bilan des forces : poids du projectile $\vec{P} = m \times \vec{g}$

1. Vecteurs accélération et vitesse

À la surface de la Terre, on considère le champ de pesanteur $\vec{g}$ comme uniforme. Le mouvement du centre de masse *G* d'un corps de masse *m* en chute libre est étudié, dans un référentiel cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a(t)}$$



Comme un corps est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids, la deuxième loi s'écrit :

$$\vec{P} = m \times \vec{a}$$
$$m \times \vec{g} = m \times \vec{a}$$
$$\vec{g} = \vec{a}$$

Lors d'une chute libre, le vecteur accélération du centre de masse du système $\vec{a}$ est constant et égal au champ de pesanteur $\vec{g}$.

Les coordonnées cartésiennes $\vec{a}$ sont donc celles de $\vec{g}$:

$$\vec{a} = g\,\vec{k} \text{ soit } \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})}$$

Par intégration (en effectuant la primitive) des coordonnées de $\vec{a}$, on en déduit les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ -g.t + v_{0z} \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})}$$

où v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} les coordonnées du vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ (cad pour t = 0 s).

De même, en effectuant la primitive, on en déduit les coordonnées du vecteur position du centre de masse au cours du temps :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x\,(t) = v_{0x}.t + x_0 \\ y\,(t) = v_{0y}.t + y_0 \\ z\,(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_{0z}.t + z_0 \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})}$$

où x_0, y_0, z_0 les coordonnées du vecteur position initiale $\overrightarrow{OG_0}$ (cad pour t = 0 s).

Remarque : On retrouve bien l'affirmation de Galilée, la chute libre d'un objet est indépendante de la masse de l'objet.

2. Chute sans vitesse initiale

Dans le cas où le solide est lâché sans vitesse initiale, alors $\vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g.t \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})}$$

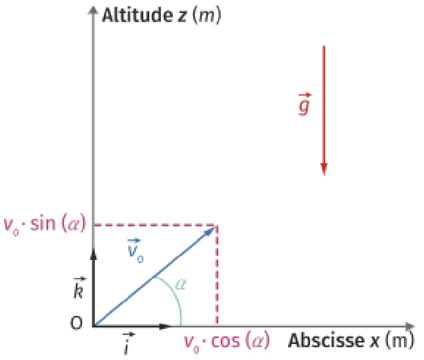
Par intégration on en déduit la position du centre de masse au cours du temps :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x\ (t) = x_0 \\ y\ (t) = y_0 \\ z\ (t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + z_0 \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})}$$

Ainsi, lors d'une chute libre sans vitesse initiale, la vitesse est proportionnelle à la durée de la chute et la trajectoire est verticale.

3. Chute avec vitesse initiale : le mouvement parabolique

Lors d'une chute dans un champ de pesanteur uniforme, le mouvement est plan et peut être étudié dans le seul repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{k})$.
Dans le cas où le solide est lancé avec une vitesse initiale formant un angle α avec l'horizontal, le vecteur $\vec{v_0}$ a pour composantes :



$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0.\cos(\alpha) \\ v_{0z} = v_0.\sin(\alpha) \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{k})}$$

Ainsi :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x\ (t) = v_0.\cos(\alpha) \\ v_z\ (t) = -g.t + v_0.\sin(\alpha) \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{k})}$$

Par intégration :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x\ (t) = v_0.\cos(\alpha).t + x_0 \\ z\ (t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin(\alpha).t + z_0 \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})}$$

L'équation de la trajectoire s'obtient en exprimant z en fonction de x.

Si la position initiale correspond aux coordonnées $\overrightarrow{OG_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{k})}$, on a alors $t = \dfrac{x - x_0}{v_0.\cos(\alpha)}$.

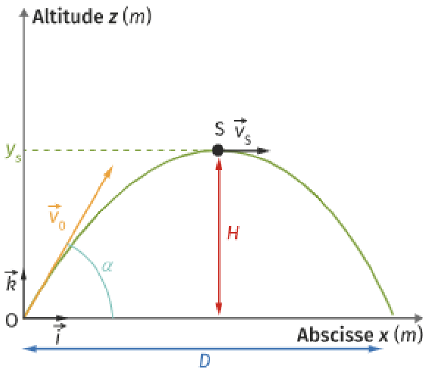
On remplaçant t par son expression en fonction de x, et on trouve :

$$z\ (x) = -\frac{1}{2}g.\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2.\cos^2(\alpha)} + (x-x_0).\tan(\alpha) + z_0$$

Si la vitesse initiale est non nulle et non verticale, la trajectoire est parabolique.

4. Exploitation des équations

Les équations horaires et de la trajectoire permettent de déterminer différentes grandeurs caractéristiques du mouvement : flèche H, portée D, angle de tir α, etc.



5. Exemple : expression de la flèche d'un mouvement parabolique

La flèche, notée H, correspond à l'altitude du sommet S de la parabole. En ce point, la vitesse est horizontale, donc : $\overrightarrow{v_S} = \begin{pmatrix} v_{x_S} = v_0.\cos(\alpha) \\ v_{z_S} = 0 = -\ g.t_S + v_0.\sin(\alpha) \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{k})}$

On en déduit que $t_S = \dfrac{v_0.\sin(\alpha)}{g}$.

En remplaçant dans l'équation horaire de $z(t)$, et pour $\overrightarrow{OG_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{i},\ \vec{k})}$ on obtient :

$$H = z_S$$

$$H = -\frac{1}{2}g.{t_S}^2 + v_0.\sin(\alpha).t_S$$

$$H = -\frac{1}{2}.\left(\frac{v_0.\sin(\alpha)}{g}\right)^2 + \frac{\left(v_0.\sin(\alpha)\right)^2}{g}$$

$$H = \frac{\left(v_0.\sin(\alpha)\right)^2}{2g}$$