Mettre en équation l'imprévisible !

I. Notion de physique statistique.

Le nombre de noyaux présents dans les échantillons généralement manipulés est tellement important (> 10^{15}) qu'il nécessite un changement d'échelle. Cette nouvelle physique, appelée physique statistique, fait appel aux probabilités et aux lois des grands nombres.

II. Lois de probabilité.

1. Nombre de désintégrations observées.

Soit ΔN le nombre de désintégrations observées pendant une durée Δt.

Rq : *Δ représente toujours une différence entre un état final et un état initial.*

a. *Influence du nombre de noyaux présents.*

Plus l'échantillon comporte de noyaux radioactifs, plus le nombre de désintégrations observées est grand.

b. *Influence de la durée d'observation.*

Plus la durée d'observation est grande, plus le nombre de désintégrations observées est grand.

c. *Influence de la nature du noyau.*

Tous les noyaux n'ont pas la même propension à se désintégrer. La capacité d'un noyau à se désintégrer plus ou moins rapidement se traduit par sa constante radioactive, notée λ.

Rq : *Une constante radioactive est homogène à l'inverse d'un temps.*

Plus la constante radioactive des noyaux constituant un échantillon est élevée, plus le nombre de désintégrations observées est grand.

d. *Récapitulatif.*

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t$$

Rq : *λ, N et Δt sont positifs, alors que ΔN est négatif (le nombre de noyaux présents diminue), d'où la présence du signe "-".*
Cette relation ne s'applique que pour un nombre important de noyaux radioactifs présents (> 10^5).

2. Loi de probabilité.

a. *Rappel sur le nombre dérivé.*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dt}$$

b. *Sciences expérimentales et calcul différentiel.*

Plusieurs paramètres peuvent être mis en jeu lors de l'étude d'un phénomène physique. Il est donc impératif de préciser lequel on fait varier.

dérivée par rapport à x : $\frac{df}{dx}$, ou f'(x) dérivée seconde : $\frac{d^2f}{dx^2}$, ou f"(x)

dérivée par rapport à t : $\frac{df}{dt}$, ou $\dot{f}(t)$ dérivée seconde : $\frac{d^2f}{dt^2}$, ou $\ddot{f}(t)$

c. *Équation différentielle associée à la désintégration d'un échantillon radioactif.*

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N. \text{ Or } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{\mathrm{d}t}$$

D'où l'équation différentielle : $$\frac{dN}{\mathrm{d}t} = -\lambda N \qquad (1)$$

III. Décroissance radioactive.

1. Deux nouvelles fonctions mathématiques.

a. La fonction exponentielle.

$$f(x) = e^x$$
$$(e^u)' = u'e^u$$
$$e^0 = 1$$

b. La fonction logarithme népérien.

$$f(x) = lnx$$
$$(lnu)' = \frac{u'}{u}$$
$$lnab = lna + lnb$$
$$ln\frac{a}{b} = lna - lnb$$
$$ln\left(a^b\right) = blna$$
$$ln1 = 0$$

c. e vs. ln.

$$e^{lnx} = x$$
$$ln(e^x) = x$$

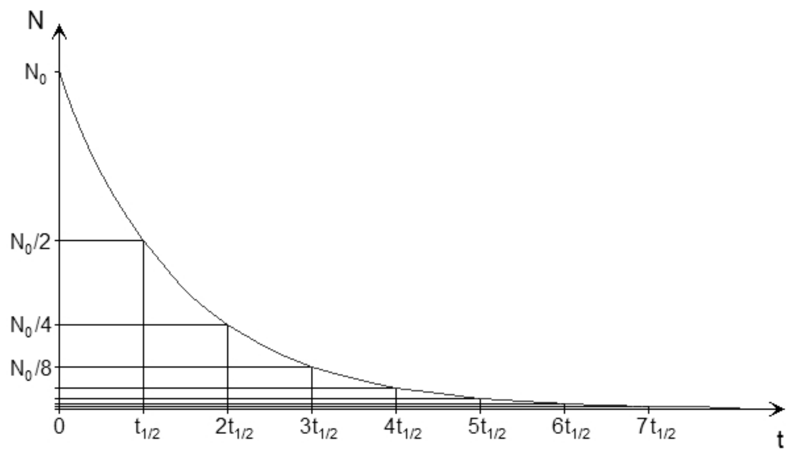
2. Résolution de l'équation différentielle.

La solution de l'équation différentielle (1) peut s'écrire :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Cette expression est appelée loi de décroissance radioactive.

3. Courbe de décroissance radioactive.



Rq : Quelle que soit la valeur de N_0, la courbe conserve la même forme.

4. Notion de demi-vie.

a. Définition.

On appelle demi-vie la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux d'un échantillon radioactif se sont désintégrés.

b. Détermination théorique.

$$N\left(t_{1/2}\right) = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}} \Longrightarrow 2 = e^{\lambda t_{1/2}} \Longrightarrow ln2 = \lambda t_{1/2}$$

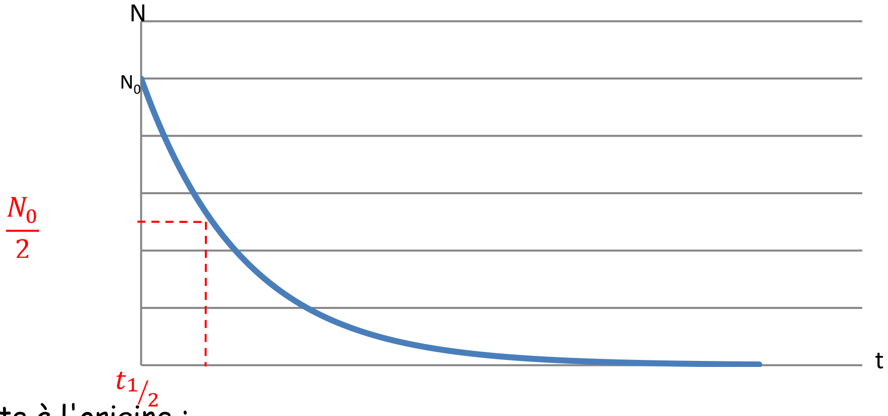
$$\Longrightarrow t_{1/2} = \frac{ln2}{\lambda}$$

Rq : $N\left(nt_{1/2}\right) = \frac{N_0}{2^n}$

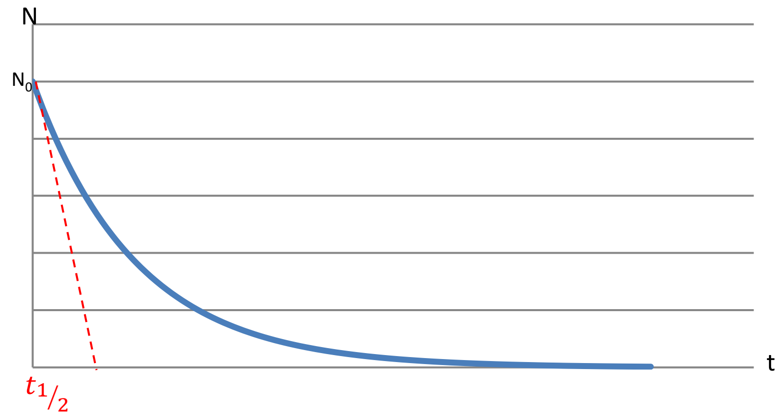
On considère que la totalité d'un échantillon s'est désintégrée au bout de $5t_{1/2}$

c. Détermination graphique.

- Par projection :



- Tangente à l'origine :



IV. Vers une étude expérimentale.

1. Notion d'activité radioactive.

Il n'existe pas de compteur de noyaux radioactifs. Par contre, on peut compter le nombre de particules émises par un échantillon radioactif pendant un intervalle de temps Δt, donc le nombre de désintégrations ayant lieu pendant cet intervalle de temps.

La vitesse à laquelle se font ces désintégrations est l'activité A de l'échantillon.

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}$$

Rq : *dN est négatif ⇒ Le signe "-" permet d'obtenir une activité positive.* $\frac{dN(t)}{dt}$ *est la dérivée de N(t) par rapport au temps.*

L'activité d'un échantillon radioactif s'exprime en becquerels (Bq), et se mesure à l'aide d'un compteur Geiger.

1 Bq correspond à une désintégration par seconde.

2. Évolution de l'activité au cours du temps.

$$N(t) = N_0e^{-\lambda t} \Longrightarrow A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N_0e^{-\lambda t} = A_0e^{-\lambda t}$$

Rq : $A(t) = \lambda N(t)$. *L'activité d'un échantillon radioactif est proportionnelle au nombre de noyaux radioactifs qu'elle contient ⇒ Étudier A(t) est donc équivalent à étudier N(t).*

2. Application à la datation.

La mesure de l'activité d'un échantillon radioactif permet d'estimer son âge.

$$A(t) = A_0e^{-\lambda t} \Longrightarrow \frac{A(t)}{A_0} = e^{-\lambda t} \Longrightarrow ln\frac{A(t)}{A_0} = -\lambda t$$

$$\Longrightarrow t = \frac{1}{\lambda}ln\frac{A_0}{A(t)}$$