Fiche méthode : Mesures et incertitudes

I. Erreurs de mesures

Une mesure n'est jamais parfaite, même si elle est réalisée avec soin. Il existe toujours des erreurs de mesures.

Exemple : Lorsque l'on prépare une solution dans une fiole jaugée de 50,0 mL, le volume de la solution n'est *pas exactement* égal à 50,0 mL. Les sources d'erreurs sont multiples :

Erreur liée à une grandeur d'influence
La température de la solution n'est peut-être pas de 20 °C. Le volume effectif prélevé dépend de la température.

Erreur liée à l'opérateur
Le bas du ménisque du liquide n'est peut-être pas exactement au niveau du trait de jauge.

Erreur liée à la qualité du matériel
La tolérance indiquée par le fabricant permet d'évaluer l'écart entre le volume indiqué sur la fiole et le volume prélevé compte tenu des imperfections inévitables du matériel.

II. Dispersion d'une série de mesures indépendantes.

Dans le cas où on effectue n fois, dans les mêmes conditions, la mesure d'une grandeur G, on observe une dispersion des mesures.

On attribue comme valeur à G, la moyenne $\bar{G}$ des résultats de ces n mesures.

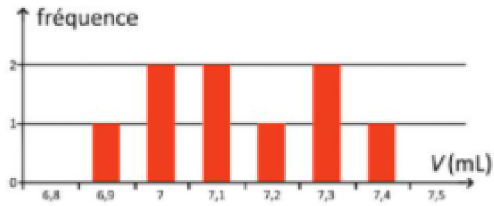
Il est possible de visualiser la dispersion des valeurs autour de la moyenne à l'aide d'un histogramme. Cette dispersion est caractérisée par l'écart-type σ_{n-1}. Plus il est faible, plus les valeurs sont resserrées autour de la moyenne.

L'écart-type peut être calculé à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.

Exemple : Des élèves ont déterminé le volume équivalent V obtenu en répétant un titrage. Leurs résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

7,2 mL	7,3 mL	7,0 mL	6,9 mL	7,1 mL	7,1 mL	7,4 mL	7,0 mL	7,3 mL

La dispersion des résultats est visible sur un histogramme comme ci-contre.



Une calculatrice permet d'obtenir la moyenne et l'écart-type σ_{n-1} de cette série de neuf mesures indépendantes.

affichage calculatrice Casio	affichage calculatrice TI	affichage calculatrice Numworks
1-Variable $\bar{x}$ =7.14444444 Σx =64.3 Σx² =459.61 xσn =0.15713484 xσn-1 =0.16666666 n =9	1-Var Stats $\bar{x}$=7.144444444 Σx=64.3 Σx²=459.61 Sx=.1666666667 σx=.1571348403 ↓n=9	
En arrondissant à 4 chiffres significatifs : la moyenne est $\bar{V}$ = 7,144 mL, l'écart-type est σ_{n-1} = 0,166 7 mL.		

III. Incertitude-type.

1. Définition

L'incertitude-type associée à une grandeur G est notée u(G). Elle fournit une estimation de l'étendue des valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à la grandeur. Elle a la même unité que la grandeur G. Il existe 2 méthodes pour évaluer une incertitude-type.

2. Evaluation de type A d'une incertitude-type. (Seconde, Première et Terminale)

L'incertitude-type u(G) est évalué par la méthode de type A lorsqu'on effectue n fois la mesure d'une grandeur G dans les mêmes conditions.

L'incertitude-type est alors estimée par la relation $\mathbf{u(G)} = \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$.

L'incertitude est ensuite arrondie à 1 chiffre significatif.

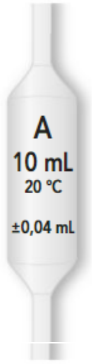
Exemple : Pour les $n = 9$ mesures du volume équivalent du tableau précédent, l'incertitude-type est estimée par $u(V) = \dfrac{0{,}166\,7 \text{ mL}}{\sqrt{9}} = 0{,}055\,57 \text{ mL}$.

En arrondissant par excès et en ne gardant qu'un seul chiffre significatif, on écrit : $u(V) = 0{,}06$ mL.

3. Evaluation de B d'une incertitude-type (Première et Terminale).

L'incertitude-type u(G) est évalué par la méthode de type B lorsqu'on effectue une mesure unique d'une grandeur G. Elle peut être estimée à partir d'une formule fournie, ou à l'aide d'un logiciel.

Exemple 1



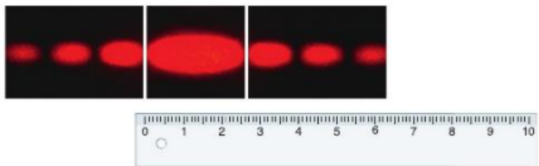
Lors de la mesure unique d'un volume de liquide prélevé à l'aide d'une pipette jaugée, il y a plusieurs sources d'erreur : certaines sont liées au matériel, d'autres à l'utilisateur.
Sur une pipette jaugée, le fabricant indique une tolérance t. Par exemple, $t = \pm\, 0{,}04$ mL.

L'incertitude-type liée à la **tolérance** t d'un dispositif peut être prise égale à $\dfrac{t}{\sqrt{3}}$.

Il vient : $u(V) = \dfrac{0{,}04 \text{ mL}}{\sqrt{3}} = 0{,}023$ mL.

En arrondissant par excès et en ne gardant qu'un seul chiffre significatif, on écrit : $u(V) = 0{,}03$ mL.

Exemple 2



Lors de la mesure unique de la largeur ℓ de la tache centrale d'une figure de diffraction avec une règle graduée en millimètre, il y a plusieurs sources d'erreur : certaines sont liées au matériel, d'autres à l'utilisateur.
L'erreur dite de double lecture est l'erreur due non seulement au positionnement du zéro de la règle mais aussi à celle de la lecture de la graduation.

L'incertitude-type liée à la **double lecture** sur une échelle graduée peut être prise égale à $\dfrac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{6}}$.

Il vient : $u(\ell) = \dfrac{1 \text{ mm}}{\sqrt{6}} = 0{,}408$ mm.

En arrondissant par excès et en ne gardant qu'un seul chiffre significatif, on écrit : $u(\ell) = 0{,}5$ mm.

Exemple 3

Lors de la mesure unique d'un éclairement lumineux, il y a plusieurs sources d'erreur : certaines sont liées au matériel, d'autres à l'utilisateur. Dans la notice de l'appareil utilisé, le fabricant indique une précision de p. Par exemple, $p = \pm\, 5$ %.

L'incertitude-type liée à la précision de l'appareil peut être prise égale à $\dfrac{p \times \text{mesure}}{100 \times \sqrt{3}}$.

Il vient, pour un éclairement lumineux mesuré $E = 760 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, $u(E) = \dfrac{5 \times 760 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}{100 \times \sqrt{3}} = 21{,}9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

En arrondissant par excès et en ne gardant qu'un seul chiffre significatif, on écrit : $u(E) = 3 \times 10^1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

4. Incertitude-type composée (Terminale)

L'incertitude-type u(G) est évalué par la méthode des incertitudes composées lorsque la grandeur G s'exprime en fonction d'autres grandeurs A, B, etc. pour lesquels les incertitudes u(A), u(B), etc. sont connues.
En terminale, les formules de composition à utiliser seront données.

Exemple

Un volume $V = 50{,}00$ mL d'une solution, mesuré avec une fiole jaugée, a une masse $m = 53{,}28$ g mesurée avec une balance électronique.
La masse volumique calculée à partir de ces mesures est $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{53{,}28\text{ g}}{50{,}00\text{ mL}} = 1{,}066\text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$.

L'incertitude-type associée à cette masse volumique déterminée par calcul est liée aux incertitudes-types associées aux grandeurs mesurées V et m intervenant dans ce calcul :
- l'incertitude-type sur m liée à l'utilisation de la balance électronique est $u(m) = 0{,}008$ g ;
- l'incertitude-type sur V liée à l'utilisation de la fiole jaugée est $u(V) = 0{,}07$ mL.

Lorsqu'une grandeur G s'obtient en multipliant ou divisant deux grandeurs A et B on a :

$$\left(\frac{u(G)}{G}\right)^2 = \left(\frac{u(A)}{A}\right)^2 + \left(\frac{u(B)}{B}\right)^2$$

D'après cette formule, on obtient ici : $\left(\dfrac{u(\rho)}{\rho}\right)^2 = \left(\dfrac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\dfrac{u(V)}{V}\right)^2$.

L'incertitude-type sur la masse volumique de la solution étudiée est : $u(\rho) = \rho \times \sqrt{\left(\dfrac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\dfrac{u(V)}{V}\right)^2}$.

Donc $u(\rho) = \dfrac{53{,}28\text{ g}}{50{,}00\text{ mL}} \times \sqrt{\left(\dfrac{0{,}008\text{ g}}{53{,}28\text{ g}}\right)^2 + \left(\dfrac{0{,}07\text{ mL}}{50{,}00\text{ mL}}\right)^2} = 0{,}001\,5\text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$.

En arrondissant par excès et en ne gardant qu'un seul chiffre significatif, on écrit : $u(\rho) = 0{,}002\text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$.

5. Ecriture du résultat

Le résultat de la mesure d'une grandeur G est un intervalle centré sur g (moyenne de mesures répétées ou valeur mesurée lors d'une mesure unique) et de demi-largeur u(G).
L'unité de u(G) doit être la même que celle de g lorsqu'elle existe. Le dernier chiffre significatif conservé pour g est celui sur lequel porte l'incertitude u(G). Le résultat de la mesure de la grandeur G s'écrit **G = g ± u(G)** ou encore **g - u(G) ≤ G ≤ g + u(G)**.

Exemples	Mesures répétées du volume à l'équivalence V	Mesure unique de masse volumique ρ à partir d'un calcul
Estimation de la grandeur	moyenne : $\overline{V} = 7{,}144$ mL	calcul : $\rho = 1{,}066\text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$
Incertitude-type évaluée	$u(V) = 0{,}06$ mL	$u(\rho) = 0{,}002\text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$
Écriture du résultat	$V = (7{,}14 \pm 0{,}06)$ mL	$\rho = (1{,}066 \pm 0{,}002)\text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$
Ceci signifie qu'il est raisonnable de penser que	le volume à l'équivalence est tel que **$7{,}08\text{ mL} \leqslant V \leqslant 7{,}20\text{ mL}$** avec une évaluation de type A de l'incertitude-type.	la masse volumique est telle que **$1{,}064\text{ g}\cdot\text{mL}^{-1} \leqslant \rho \leqslant 1{,}068\text{ g}\cdot\text{mL}^{-1}$** avec une évaluation de type B des incertitudes-types.

IV. Comparaison d'une mesure à une valeur de référence

Dans certains cas, la grandeur mesurée a une valeur déjà connue précisément, considérée comme une valeur de référence g_{ref}. Un résultat de mesure g associé à une incertitude-type u(g) peut être comparé à la valeur de référence en calculant le quotient $\dfrac{|g - g_{ref}|}{u(g)}$. Le résultat de mesure est en accord avec la valeur de référence si ce quotient est inférieur ou égal à deux.
On peut également comparer un résultat de mesure à une valeur de référence en utilisant l'écart relatif : $\dfrac{|g - g_{ref}|}{g_{ref}}$